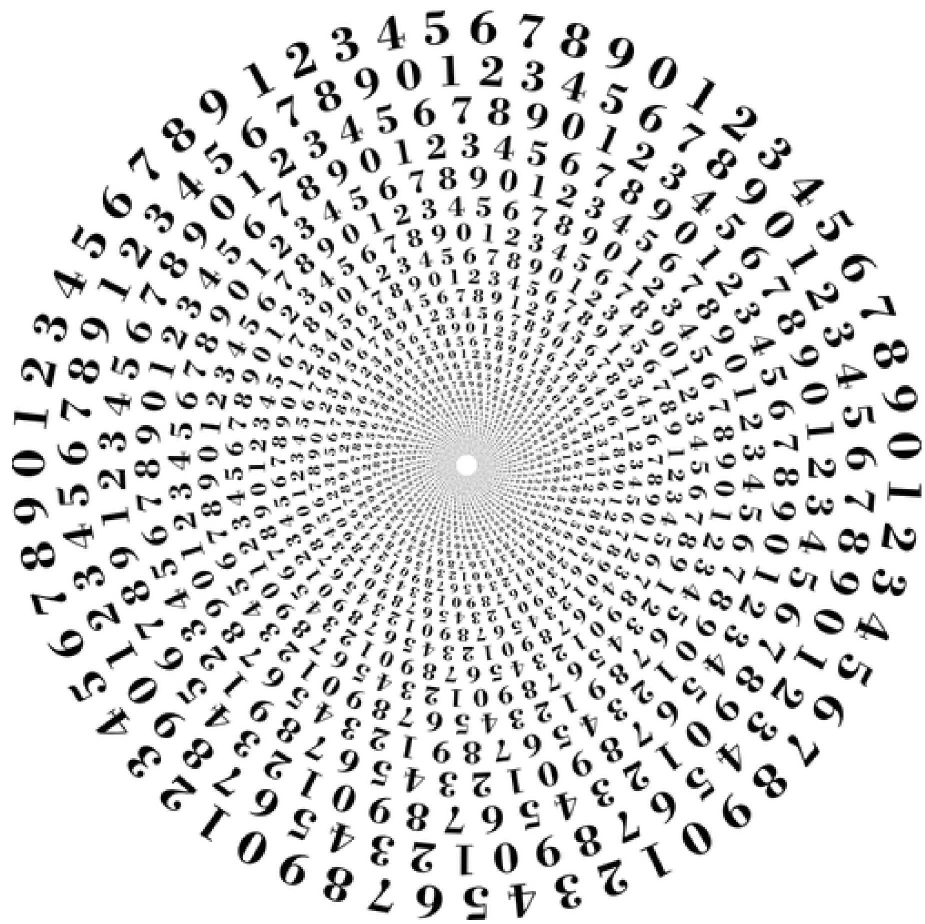
II

ARIMÉTICA



CEAP

Centro de Estudios Académicos y Profesionales

Aritmética

Módulo II

Dibujo de Portada
Publicdomainvectors.org

Presentación

La Aritmética es la más antigua y simple de las ramas de la matemática en la que se han desarrollado las principales operaciones matemáticas conocidas por el hombre, a saber: Adición (Suma), Sustracción (Resta), Multiplicación y División. La aritmética se encarga de realizar con números y simbología en conjunto con las operaciones antes mencionadas, el desarrollo de propiedades y habilidades las cuales pueden ser usadas en la vida cotidiana y materias de estudio que impliquen a la matemática como base fundamental de aprendizaje.

La palabra aritmética proviene del griego (arithmós) que significa número. En la época prehistórica fue donde nació la aritmética esto gracias a que las comunidades prehistóricas de alguna manera empezaron a usar la aritmética dentro de las matemáticas en cosas muy simples como contar los animales que ellos tenían en su comunidad para la productividad. También la utilizaron para hacer mediciones de tiempo y así ir organizando las actividades que realizaban a lo largo de un día. (25,000-5,000 A.C). El hombre prehistórico contaba haciendo marcas en los árboles.

En nuestros días no se puede realizar ningún estudio objetivo que no incorpore una metodología matemática y, de manera muy especial, unos cálculos aritméticos que permitan cuantificar los distintos ámbitos de la realidad.

La presente guía, sintetiza parte de los temas introductorios de la aritmética, divididos en una sección teórica y una práctica. Este material, está diseñado para que el alumno adquiera los conocimientos necesarios para aprobar la parte del examen correspondiente a esta disciplina; no obstante, este deberá invertir tiempo de calidad para conseguir la suficiente destreza en la materia.

Índice

Generalidades de la Aritmética

1. Aritmética

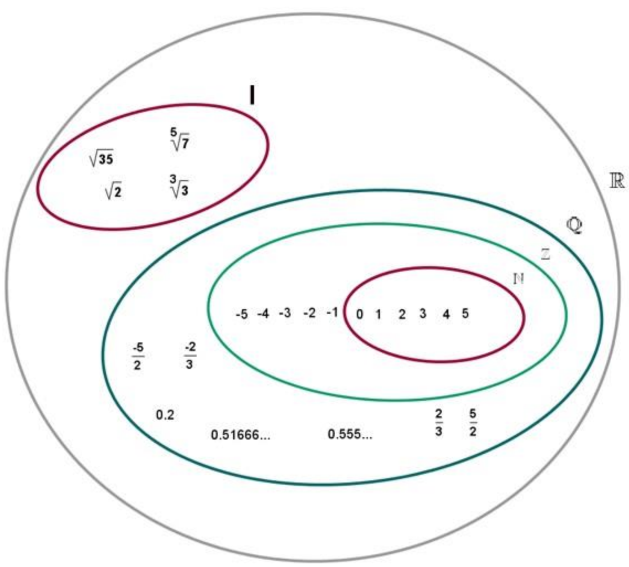
En término generales, la aritmética es una rama de las matemáticas, la cual se ocupa del estudio de los números y sus operaciones elementales entre ellos: suma o adición, resta, multiplicación y división.

1.1 Números

Se le llama número, al nombre del símbolo o signo con el que se representa una determinada cantidad o valor; de esta forma, uno (1), dos (2), tres (3), son algunos ejemplos de números.

Dentro de las matemáticas, existe una gran clasificación para los números, misma que permite entender muchas de sus propiedades. Así, los números se clasifican en Reales, Enteros, Racionales, Irracionales, Naturales e Imaginarios.

Para fines de este curso, nos enfocaremos en el estudio de todos los números con excepción de los Irracionales e Imaginarios.



Fuente: Ditutor, 2017.

1.1.1 Números Reales

En matemáticas, se le llama números reales ($\mathbb{R}$) al conjunto de los números racionales (Q), enteros (Z), naturales (N) e Irracionales (I).

1.1.2 Números Naturales

Dentro de las matemáticas, los números naturales (N) son los más importantes, ya que a partir de ellos se conforman todos los demás en el sentido estructural, de esta forma el conjunto del $\{1, 2,3, 4, 5,6, 7, 8, 9\}$ es la base de los números naturales. Por lo tanto, podemos concluir que el conjunto de los N es infinito.

Ejemplo:

$$\underbrace{1,2, 3, 45, 67, 123, 45676, 987,109383 \ldots}_{\text{Todos los números de la serie son naturales}}$$

1.1.3 Números Enteros

Los números enteros, denotados por la letra (Z) son el conjunto de los números naturales, sus inversos y el cero. De esta forma, tendremos enteros positivos, negativos y el cero.

Ejemplo:

$$\underbrace{13, 14, 1257, -21,0, -125, 36987, -14562}_{\text{Todos los números de la serie son enteros}}$$

1.1.4 Números Racionales

Los números racionales, denotado por la letra (Q) son aquellos que pueden representarse como el cociente de dos números enteros; es decir, tienen la forma $\frac{a}{b}$.

Ejemplo:

$$\underbrace{\frac{8}{16},\frac{1}{5},-\frac{1}{9},\ -\frac{2}{79}}_{\text{Todos los números de la serie son racionales}}$$

1.1.5 Números Irracionales

Los números irracionales, comúnmente denotados por la letra (I) son aquellos que no pueden ser representados de la forma $\frac{a}{b}$, a pesar de que (al igual que los números racionales), el resultado del cociente $\frac{a}{b}$ resulta un número decimal (en la mayor parte de las veces).

Se dice que los números irracionales pueden tener una cantidad infinita de números decimales no periódicos, por lo que es imposible su representación de la forma $\frac{a}{b}$.

Ejemplo:

$\pi = 3{,}14159265358979323846$

$\sqrt{5} = 2.2360679774997896964091736687313\ldots$

$\sqrt{11} = 3.3166247903553998491149327366707\ldots$

1.2 Propiedades de los números reales

Los números reales atienden ciertas reglas o propiedades operativas que se asocian principalmente a la suma y a la multiplicación, a continuación se enuncian algunas:

1.2.1 De la suma

a) Cerradura

Establece que, al sumar dos números reales $a\ y\ b$, el resultado siempre será otro real.

Ejemplo 1:

Sean los números reales $a = 5\ \ y\ b = 34,$ entonces $a + b = 39;$ y 39 también es un número real.

Ejemplo 2:

Sean los números reales $a = 2\ \ y\ b = \frac{11}{3}$, entonces $a + b = 2 + \frac{11}{3} = \frac{17}{3}$, y $\frac{17}{3}$ también es un número real.

Ejemplo 3:

Sean los números reales $a = 7\ \ y\ b = -23,$ entonces $a + b = -16$, y -16 también es un número real.

b) Conmutatividad

La conmutatividad señala que al sumar dos números reales a y b, el resultado será el mismo que si sumamos b y a. De esta forma:

$$a + b = b + a$$

Ejemplo 1:

Sean los números reales $a = 45\ \ y\ b = 66$

Entonces,

$$45 + 66 = 66 + 45$$

$$111 = 111$$

Ejemplo 2:

Sean los números reales $a = \frac{8}{2}\ \ y\ b = \frac{21}{2}$

Entonces,

$$\frac{8}{2} + \frac{21}{2} = \frac{21}{2} + \frac{8}{2}$$

$$\frac{29}{2} = \frac{29}{2}$$

c) Asociactividad

Si deseamos sumar 3 números reales, no importa el orden en el que esto se haga, el resultado será siempre el mismo. Esta afirmación responde a la siguiente proposición:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Ejemplo 1:

Sean $a = 14\ \ y\ b = 4\ y\ c = 3$

Entonces,

$$(a + b) + c = a + \ (b + c)$$

$$(14 + 4) + 3 = 14\ + (4\ + 3)$$

$$(18) + 3 = 14\ + 7$$

$$21 = 21$$

Ejemplo 2:

Sean $a = \frac{1}{4}\ \ y\, b = \frac{2}{4}\ y\, c = \frac{9}{4}$

Entonces,

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4}\right) + \frac{9}{4} = \frac{1}{4} + \left(\frac{2}{4} + \frac{9}{4}\right)$$

$$\frac{3}{4} + \frac{9}{4} = \frac{1}{4} + \frac{11}{4}$$

$$\frac{12}{4} = \frac{12}{4}$$

$$3 = 3$$

1.2.2 De la multiplicación

a) Cerradura

Establece que, al multiplicar dos números reales, el resultado siempre será otro real.

Ejemplo 1:

Sean los números reales $a = 9\ \ y\, b = 4$, entonces $a * b = 36;$ y 36 también es un número real.

Ejemplo 2:

Sean los números reales $a = 2\ \ y\, b = \frac{6}{2}$, entonces $a * b = 2 * \frac{6}{2} = \frac{12}{2}$, y $\frac{12}{3}$ también es un número real.

Ejemplo 3:

Sean los números reales $a = 21\ \ y\, b = -4$, entonces $a * b = -84$, y -84 también es un número real.

b) Conmutatividad

La conmutatividad señala que al multiplicar dos números reales a y b, el resultado será el mismo que si multiplicamos b y a; o lo que es igual, el orden de los factores no altera el producto. La siguiente expresión señala lo expuesto:

$$a * b = b * a$$

Ejemplo 1:

Sea los números reales $a = 5 \;\; y \, b = 11$

Entonces,

$$5 * 11 = 11 * 5$$

$$55 = 55$$

Ejemplo 2:

Sea los números reales $a = 2 \;\; y \; b = \frac{21}{2}$

Entonces,

$$2 * \frac{21}{2} = \frac{21}{2} * 2$$

$$\frac{42}{2} = \frac{42}{2}$$

c) Asociatividad

Si deseamos multiplicar 3 números reales, no importa el orden en el que esto se haga, el resultado será siempre el mismo. Esta afirmación responde a la siguiente proposición:

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

Ejemplo 1:

Sea $a = 4 \;\; y \, b = 4 \, y \, c = 3$

Entonces,

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

$$(4 * 4) * 3 = 4 * (4 * 3)$$

$$16 * 3 = 4 * 12$$

$$48 = 48$$

Ejemplo 2:

Sea $a = 2 \;\; y \; b = \frac{2}{4} \; y \; c = 3$

Entonces,

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

$$\left(2 * \frac{2}{4}\right) * 3 = 2 * \left(\frac{2}{4} * 3\right)$$

$$\frac{4}{4} * 3 = 2 * \frac{6}{4}$$

$$\frac{12}{4} = \frac{12}{4}$$

$$3 = 3$$

d) Distributividad

La distributividad señala que, en el producto de un número real por la suma de dos números reales, esto será igual a la suma de los productos entre dicho número y los sumandos. La expresión que explica dicha afirmación es la siguiente:

$$a(b + c) = ab + ac$$

Ejemplo:

Sea $a = 6 \;\; y \; b = 4 \; y \; c = 12$

Entonces,

$$a(b + c) = ab + ac$$

$$6(4 + 12) = 6 * 4 + 6 \; *12$$

$$6(16) = 24 + 72$$

$$96 = 24 + 72$$

$$96 = 96$$

e) Factor común

Es el procedimiento inverso de la propiedad distributiva. Cuando tenemos la suma de dos productos y dichos productos tienen un factor en común, la expresión se puede representar como el producto del factor en común por la suma de los otros factores; es decir:

Factor común de los productos

$$\underbrace{ab}+\underbrace{ac} = a * (b + c)$$

Productos

Ejemplo:

Sea $a = 4, b = 6\ y\ c = 10$

Entonces,

$$ab + ac = a * (b + c)$$

$$4 * 6 + 4 * 10 = 4 * (6 + 10)$$

$$24 + 40 = 24 + 40$$

$$64 = 64$$

Ejercicio 1

1. En cada uno de los casos, coloca si el número pertenece al conjunto de los naturales (N), enteros (Z), racionales (Q) e irracionales (I).

a) -1234 ____________________

b) $-\frac{1}{4}$ ____________________

c) $\sqrt{2}$ ____________________

d) 23462 ____________________

e) 534 ____________________

f) $\frac{3}{2}$ ____________________

2. Señala la propiedad que cumple cada una de las siguientes operaciones:

a) $(5+9)+4=5\ +(9+4$

b) $67+23=23+\ 67$

c) $5(4+6)=5*4\ +5*6$

d) $)\ 6*6+6*10=\ 6*(6+)$

e) $9*78=78*9$

f) $(46*4)*3=46\ (4*3)$

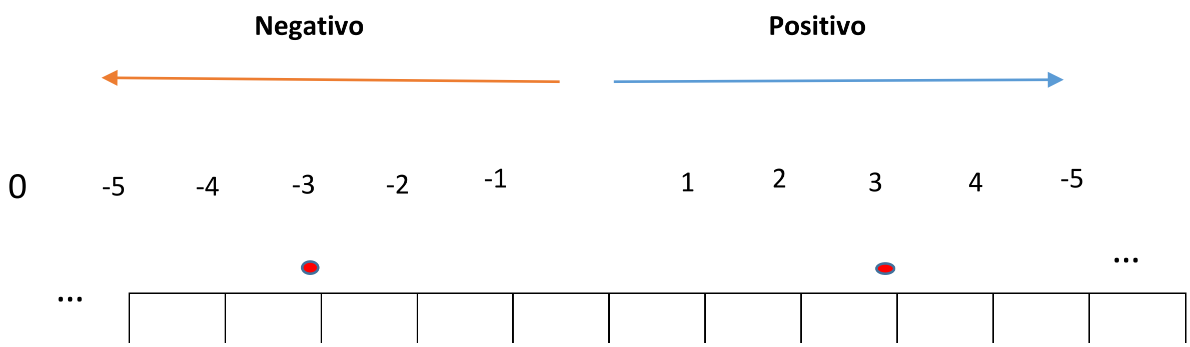
g) $5*3+5*6=5\ (3+6)\ \ 10$

2. El Signo de los números

En matemáticas, cada número real tiene asociado un signo (de más o de menos), que permite entender la naturaleza de estos; es decir, conocer su valor. Dicho signo siempre se coloca a la izquierda y se le llamará *número positivo* a aquel que tenga asociado el signo de más; por otro lado, se conoce como *número negativo* a aquel que venga acompañado del signo de menos.

Es importante señalar que, cuando un número no tiene explícito un signo a su izquierda, este por defecto será positivo.

Los números positivos y negativos suelen representarse en la recta numérica para facilitar su entendimiento, tal y como se muestra a continuación:



Así, todo número menor al cero tendrá un valor negativo y todo aquel que sea mayor a cero será considerado como positivo.

Ejemplos:

- El número 5 por defecto es positivo,
- El número -3 es negativo y se lee “menos tres”.
- En la operación $9 - 12$, el número 9 es positivo por defecto y el 12 es negativo pues a su izquierda tiene asociado el signo negativo.
- En la operación $-8 + 3$, el número 8 es negativo pues a su izquierda tiene asociado el signo menos; por otro lado, el número 3 es positivo.

2. 1 Operaciones Aritméticas

Las operaciones aritméticas reconocidas y elementales son seis: suma o adición, resta o sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación.

Signos de las operaciones aritméticas

- El signo de la **suma** es +, y se lee "más". El término "sumar" hace referencia a la acción de añadir una cantidad a otra.
- El signo de la **resta** es -, y se lee "menos". El término "restar" hace referencia a la acción de sustraer una cantidad a otra.
- El signo de la **multiplicación** más reconocido es x. El término "multiplicar" refiere al hecho de sumar un número tantas veces como indica el otro. Así, $3x4$ (tres por cuatro) es igual a sumar 4 veces el valor de 3 $(3 + 3 + 3 + 3)$. El signo x no es el único empleado para representar la multiplicación entre números o factores, en este caso se usa un punto, asteriscos, paréntesis, llaves o corchetes.

Ejemplo:

$3\,x\,4$ Se lee 3 por

$(3)(4)$ Se lee 3 por 4

$3 * 4$ Se lee 3 por 4

$[3][4]$ Se lee 3 por 4

Entre factores literales o un factor numérico y una literal el signo de multiplicación se omite.

Ejemplo:

$a\,x\,b\,x\,c$ equivale a abc

$6\,x\,a\,x\,b$ equivale a $6ab$

El signo de **división** es ÷, que se lee dividido entre. También se indica por medio de una raya horizontal separando el dividendo del divisor o por medio de una diagonal invertida.

Ejemplo:

$\frac{a}{b}$ Se lee *a* sobre *b* ó *a* entre *b*

a/b Se lee *a* sobre *b* ó *a* entre *b*

$a \div b$ Se lee *a* entre *b ó a* sobre *b*

El signo de la **potencia o elevación a una potencia**, se indica por un número pequeño arriba y a la derecha de una cantidad (a esto también se le conocer como superíndice). Dicho número indica las veces en la que dicha cantidad (llamada base) debe multiplicarse por sí misma.

Ejemplo 1:

Exponente

a^7

Base

La expresión anterior se lee *a* elevada a la *7* ó *a* elevada a la séptima e indica la siguiente operación:

$$a^7 = a * a * a * a * a * a * a$$

Hemos multiplicada la base, 7 veces por sí misma.

Ejemplo 2:

$$2_4$$

La expresión anterior se lee 2 elevado a la 4 ó 2 elevado a la cuarta e indica la siguiente operación:

$$2^4 = 2 * 2 * 2 * 2 = 16$$

Hemos multiplicada la base, 4 veces por sí misma.

Un error muy común que se comete al operar con potencias, es pensar que dicha operación sugiere una simple multiplicación, en el caso de 2^4 no será lo mismo elevar el número 2a la potencia 4que multiplicar $2x4$.

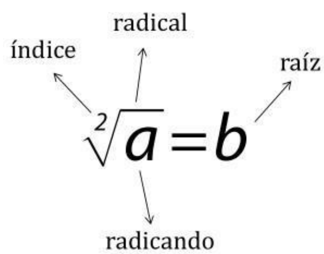
Ejemplo:

$2^4 = 2 * 2 * 2 * 2 = 16$ ✓ Forma correcta

$2^4 = 2x4 = 8$ ✗ Forma incorrecta

Cuando una letra no tiene exponente, su exponente será la unidad. De esta forma a es equivalente a $\boldsymbol{a^1}$; mnx equivale a $\boldsymbol{m^1\,n^1\,x^1}$.

El signo de raíz es √, conocido como signo radical.



La operación anterior nos sugiere encontrar un número b tal que al elevarlo al cuadrado nos dé como resultado el radicando.

Por regla general, cuando el radical no tiene un índice explicito, indicará que es una raíz cuadrada.

Ejemplo 1:

$$\sqrt{\mathbf{9}} = \mathbf{3}$$

Hemos encontrado un número tal que elevado al cuadrado nos de 9, por lo tanto, dicho número será la solución de la operación y será conocido como raíz.

Ejemplo 2:

$$\sqrt{\mathbf{16}} = \mathbf{4}$$

Comprobación

$4^2 = 16$; por lo tanto, 4 es la raíz cuadrada de 16

En caso de que el radical tenga explicito un índice, este índice indicará la potencia de la raíz tal que al operar con ella nos resulte el radicando.

Ejemplo 1:

$$\sqrt[4]{16}$$

La operación anterior se lee “raíz cuarta de 16”. Así, si el índice fuera 3 se le llamaría raíz cubica; si fuera 5, raíz quinta; si fuera 6, raíz sexta; etc.

Raíz cuarta de 16 nos indica que debemos encontrar 4 números tal que multiplicados por si mismos nos dé como resultado 16; en otras palabras, hallar un número tal que elevado a la cuarta potencia nos de 16.

Solución:

$$\sqrt[4]{16}=?$$

Podemos buscar un número tal que multiplicado por si mismo 4 veces nos dé como resultado el número 16.

$$\sqrt[4]{16}= \_\_ * \_\_ * \_\_ * \_\_$$

Dicho número es el 2, por lo tanto 2 es la raíz cuarta de 16

$$\sqrt[4]{16}= \underbrace{\underline{2} * \underline{2} * \underline{2} * \underline{2}}$$

Este método se le conoce como expresión más simple de la raíz.

Otro método consiste en hallar un número tal que elevado a la cuarta potencia nos de 16. Dicho número vuelve a ser el 2.

$$2^4 = 16$$

De ambos métodos podemos concluir que la raíz cuarta de 16 es 2.

2.2 Ley de los signos en las Operaciones Aritméticas

Al efectuar operaciones aritméticas con los números, es muy importante tener en cuenta el signo asociado a cada uno de ellos, pues independientemente de la operación que se esté sugiriendo, el signo influye de manera directa en el resultado de la operación, por tal motivo, se deben seguir ciertas reglas a las que se les conoce como **Leyes de los Signos.**

Las leyes de los signos se asocian principalmente a las cuatro operaciones más elementales, las cuales son: la suma, la resta, la multiplicación y la división.

- **De la Suma y resta**

Cuando se requiere operar dos números enteros, se pueden presentar varios casos atendiendo a los signos de los números con los que se desea sumar o restar, estos casos se enuncian en el siguiente cuadro:

Caso	Signo del número	Signo del número	Signo asociado al resultado
1	+	+	+
2	-	-	-
3	-	+	SVM*
4	+	-	SVM*

* Signo del Valor Mayor (SVM)

Ejemplo:

Caso 1,

$$5 + 234 = 239$$

Signo del resultado

+

Signo de los números

+

Ejemplo:

Caso 2,

$$-25 - 23 = -48$$

Signo del resultado

-

Signo de los números

-

Nótese que, en este ejemplo aunque se realiza la operación suma entre los números, el resultado será negativo por la ley de los signos.

Ejemplo:

Caso 3,

$$-4 + 9 = 5$$

Signo del resultado

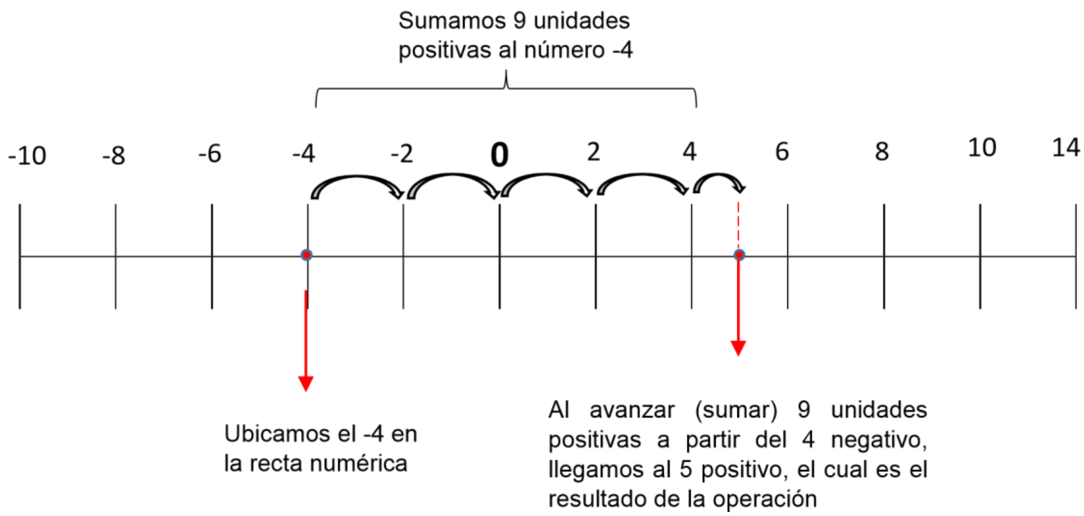
+

Signo de los números

- y **+**

Respectivamente

En este caso, debido a que ambos números tienen signo distinto, para entender que sucede con la operación conviene ubicarnos en la recta numérica:



Así, el resultado de la operación es positivo, ya que hemos conservado el signo del valor mayor (+9).

Ejemplo 4:

Caso 3,

$$6 - 9 = -3$$

Signo del resultado

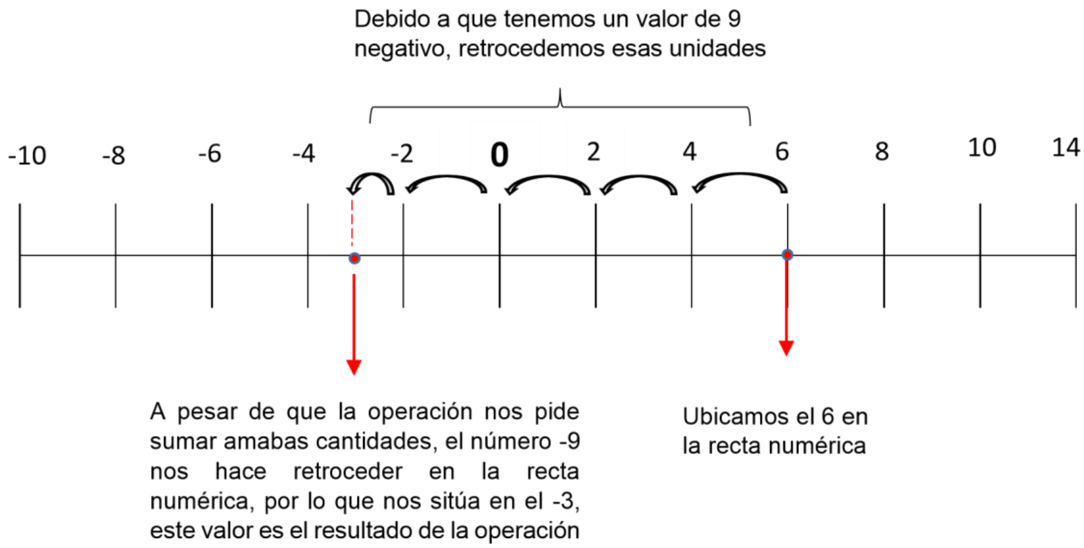
-

Signo de los números

+ y **-**

Respectivamente

En este caso, debido a que ambos números tienen signo distinto, para entender que sucede con la operación conviene ubicarnos en la recta numérica:



Así, el resultado de la operación es negativo, ya que hemos conservado el signo del valor mayor (-9).

- **De la Multiplicación**

Cuando se requiere efectuar la operación “multiplicación”, se pueden presentar varios casos atendiendo a los signos de los números con los que se desea operar, estos casos se enuncian en el siguiente cuadro:

Caso	Signo del número	Operación que se realiza	Signo del número	Signo asociado al resultado
1	+	x	+	+
2	-	x	-	+
3	-	x	+	-
4	+	x	-	-

Ejemplo:

Caso 1,

- $12\ x\ 4 = 48$ (Positivo por positivo nos resulta otro valor positivo)
- $(4)(65) = 260$
- $8 * 12 = 96$

Ejemplo:

Caso 2,

- $-3\ \ x - 25 = 75$ (Negativo por negativo nos resulta un valor positivo)
- $(-4)(-50) = 200$ □ $\qquad -18 * -10 = 180$

Ejemplo:

Caso 3,

- $-10x12 = -120$ (Negativo por positivo nos resulta un valor negativo)
- $(-125)(5) = -625$
- $-19 * 12 = -228$

Ejemplo:

Caso 4,

- $12x - 4 = -48$ (Positivo por negativo nos resulta un valor negativo)
- $(17)(-65) = -1{,}105$
- $8 * -23 = -184$

De la División

Cuando se requiere efectuar la operación “división”, se pueden presentar varios casos atendiendo a los signos de los números con los que se desea operar, estos casos se enuncian en el siguiente cuadro:

Caso Signo del Operación que Signo del Signo asociado número se realiza número al resultado

1	+	÷	+	+
2	-	÷	-	+
3	-	÷	+	-
4	+	÷	-	-

Ejemplo: Caso

1,

- $9 \div 3 = 3$ (Positivo entre positivo nos resulta otro positivo)
- $\frac{125}{5} = 25$
- $180/6 = 30$

Ejemplo:

Caso 2,

- $-250 \div -10 = 25$ (Negativo entre Negativo nos resulta un negativo)
- $\frac{-1000}{-4} = 250$
- $-70/-2 = 35$

Ejemplo: Caso

3,

- $-50 \div 5 = -10$ (Negativo entre positivo nos resulta un negativo)
- $\frac{-1000}{10} = -100$
- $-700/5 = -140$

Ejemplo:

Caso 4,

- $400 \div -5 = -80$ 5(Positivo entre negativo nos resulta un negativo)
- $\frac{810}{-9} = -90$
- $600/-12 = -50$

2.3 Operaciones Inversas

Las operaciones inversas son aquellas que revierten los efectos de otra operación; en este sentido:

- La resta es la inversa de la suma
- La división es la inversa de la multiplicación
- La radicación es la inversa de la potenciación

Ejercicio 2

Resuelve las siguientes operaciones atendiendo a la ley de los signos

a) $345 + 8936 + 928 =$

b) $-234 + 672 =$

c) $-87 * 97 =$

d) $250/-11=$

e) $(-98)(-23) =$

f) $-800/-40 =$

g) $-98 + 17 =$

h) $-134 - (-98) =$

Tarea 2

Contesta las siguientes preguntas:

a) Ubica en la recta numérica los números: $-2, -9,\ 11, -6,\ 6\ ,7\ y\ 4$

b) ¿Cuál consideras que es la importancia de respetar la Ley de los Signos?

c) Realiza las siguientes operaciones ubicando cada número y el resultado en la recta numérica, tal y como se ejemplifico en el presente cuaderno de trabajo.

- $-9 + 6 =$
- $12 - 17 =$
- $6 - 8 =$
- $-14 + 25 =$

d) Realiza las siguientes operaciones:

- 2^5
- 5^4
- 3^3
- $\sqrt{16}$
- $\sqrt{90}$
- $\sqrt{25}$

3. Clasificación de los signos en la aritmética

En la aritmética existen 3 clasificaciones de los signos: signos de operación, signos de relación y signos de agrupación.

El apartado anterior (operaciones aritméticas), la suma o adición, la resta, la multiplicación, la división, la elevación a una potencia y la extracción de raciones se clasifican en el grupo de los *Signos de Operación*.

3.1 Signos de Relación

Los signos de relación se utilizan para indicar la relación que hay entre dos cantidades.

- El signo $=$ se lee igual a. $x = y$ se leerá "equis es igual a ye".
- El signo $\neq$ se lee diferente de. $x \neq y$ se leerá "equis es diferente de ye".
- El signo $>$ se lee mayor que. $x > y$ se leerá "equis es mayor que ye".
- El signo $<$ se lee menor que. $x < y$ se leerá "equis es menor que ye".
- El signo $\geq$ se lee mayor que o igual. $x \geq y$ se leerá "equis es mayor o igual a ye"
- El signo $\leq$ se lee menor que o igual. $x \leq y$ se leerá "equis es menor o igual a ye"

Ejemplo 1:

$7 > 6$ Se lee 7 es mayor que 6, también se puede escribir $6 < 7$. Nótese que el símbolo siempre está abierto hacia el número mayor.

De este ejemplo también podemos afirmar que *7 ≠6;* es decir, 7 es diferente que 6.

Ejemplo 2:

$243 < 66\,6$ Se lee 243 es menor que 666, también se puede escribir $6\,66 > 243$. Nótese que el símbolo siempre está abierto hacia el número mayor.

De este ejemplo también podemos afirmar que *666 ≠243;* es decir, 666 es diferente que 243.

3.2 Signos de Agrupación

Los signos de agrupación más utilizados son: los paréntesis ordinarios $(\,)$, los corchetes $[\,]$ y las llaves $\{\,\}$. Los signos de agrupación indican que la operación encerrada en su interior debe efectuarse en primer lugar. Así, $(b + c)\,d$ indica que el resultado de la suma de a y b debe multiplicarse por d; $\{a + b\} \div \{\, c - d\,\}$ indica que la suma de a y b debe dividirse entre la diferencia de c y d.

Ejemplo 1:

$$(6 + 9)\;8\; =$$

En este caso, para obtener el resultado de la operación propuesta, primero hay que realizar la operación dentro del paréntesis y posteriormente las que están fuera de él.

Entonces:

$$(6 + 9)\;8\; =$$

$$\underbrace{(15)\;8}\; = \; 120$$

Una vez realizada la operación, solo se conservarán los paréntesis, corchetes o llaves sí la operación que prosigue es una multiplicación

Ejemplo 2:

$$54 + [5 * 3]\; =$$

Análogo al ejemplo anterior, primero se deberá operar lo que esté dentro de paréntesis, corchetes o llaves.

Entonces:

$$54 + [5 * 3]\; =$$

$$\underbrace{54 + 15}\; = \; 69$$

En este caso, hemos eliminado los corchetes después de realizar la operación dentro de ellos, y la operación que prosigue es una suma

3.3 Jerarquización de operaciones

La jerarquía de operaciones es un criterio que establece el orden de ejecución de las operaciones dentro de una expresión matemática.

En el caso en que las operaciones no contengan signos de agrupación (paréntesis, corchetes o llaves), se deberán tener en cuenta las siguientes consideraciones en el orden que se propone.

1. Se deberán realizar primeramente las potencias y radicales, después las multiplicaciones o divisiones y finalmente las sumas o restas.
2. Una vez que se realizan las operaciones con mayor jerarquización (potencias y radicales o multiplicaciones y divisiones), se prosigue a ejecutar las operaciones restantes empezando de izquierda a derecha.

Ejemplo 1:

$$3 * 2 - 5 + 4 * 3 - 8 + 5 * 2 =$$

De acuerdo a las consideraciones antes expuestas, se deben realizar primero los productos por tener mayor jerarquía.

$$\underbrace{3 * 2} - 5 + \underbrace{4 * 3} - 8 + \underbrace{5 * 2} =$$

$\mathbf{6} - 5 + \mathbf{12} - 8 + \mathbf{10} =$

Efectuamos las sumas y las restas.

$$6 - 5 + 12 - 8 + 10 = 15$$

Ejemplo 2:

$$10 \div 2 + 5 * 3 + 4 - 5 * 2 - 8 + 4 * 2 - 16 \div 4 =$$

Comenzamos a operar los productos y cocientes en el orden en el que los encontramos, ya que estas operaciones tienen la mayor jerarquización.

$$\underbrace{10 \div 2} + \underbrace{5 * 3} + 4 - \underbrace{5 * 2} - 8 + \underbrace{4 * 2} - \underbrace{16 \div 4} =$$

$$\mathbf{5} + \mathbf{15} + 4 - \mathbf{10} - 8 + \mathbf{8} - \mathbf{4} =$$

Finalizamos con las operaciones de sumas y restas, comenzando de izquierda a derecha.

$$5 + 15 + 4 - 10 - 8 + 8 - 4 = 10$$

En el caso en que las operaciones contengan signos de agrupación (paréntesis, corchetes o llaves), se deberán tener en cuenta las siguientes consideraciones en el orden que se propone.

1. Se resuelven primero las operaciones que están dentro de los signos de agrupación (paréntesis, llaves, corchetes), si existen operaciones que están contenidas en varios signos de agrupación, se deberá proceder a realizar las operaciones que estén más adentro de dichos signos.
2. Si los signos de agrupación contienen varias operaciones, se deberán realizar primeramente las potencias y radicales, después las multiplicaciones o divisiones y finalmente las sumas o restas.
3. Una vez que se realizan las operaciones dentro de los paréntesis, se prosigue a ejecutar las operaciones restantes empezando de izquierda a derecha.

Ejemplo 1:

$$(15 - 4) + 3 - (12 - 5 * 2) + (5 + 16 \div 4) - 5 + (10 - 2^3) =$$

Resolvemos las operaciones contenidas en los paréntesis, atendiendo a las reglas de la jerarquización

$$(15 - 4) + 3 - (12 - \underbrace{5 * 2}) + (5 + \underbrace{16 \div 4}) - 5 + (10 - \underbrace{2^3}) =$$

$$(15 - 4) + 3 - (12 - \mathbf{10}) + (5 + \mathbf{4}) - 5 + (10 - \mathbf{8}) =$$

Proseguimos con las operaciones que se encuentran dentro de los paréntesis para eliminarlos.

$$\underbrace{(15 - 4)} + 3 - \underbrace{(12 - \mathbf{10})} + \underbrace{(5 + \mathbf{4})} - 5 + \underbrace{(10 - \mathbf{8})} =$$

$$\mathbf{11} + 3 - \mathbf{2} + \mathbf{9} - 5 + \mathbf{2} = 18$$

Ejemplo 2:

$$[15- (\underbrace{2^3} - \underbrace{10 \div 2})\,] * [5 + (\underbrace{3 * 2} - 4)]- 3+ (8 - \underbrace{2 * 3}\,)=$$

Primero operamos con las potencias, productos y divisiones que se encuentran dentro de los signos de agrupación, tomando en cuenta que se deberá comenzar por aquellas operaciones que están más adentro de los paréntesis, corchetes y lleves.

$$[15- (\underbrace{8 - 5})\,] * [5 + (\underbrace{6 - 4})]- 3+ (\underbrace{8 - 6}\,)=$$

Continuamos con las sumas y restas dentro de los paréntesis

$$[15 - 3] * [5 - 2\,] - 3 + 2 =$$

$$12 * 7 - 3 + 2 =$$

Una vez que hemos terminado de operar con los corchetes, continuamos con las operaciones restantes, teniendo en cuenta la jerarquización de las operaciones y el orden de operación (izquierda a derecha)

$$84 - 3 + 2 = \mathbf{83}$$

El resultado de esta operación es

Ejercicio 3

Coloca el signo de relación que corresponda en cada caso:

a) 4 ___ π

b) $\sqrt{25}$___14

c) 2^4___97

d) 9^3___729

e) 98___$\sqrt{100} =$

Resuelve las siguientes operaciones:

a) $\{\,[36 + 24 - (8 - 7) + (2 + 11)\,]\,\} =$

b) $-\{45 - 13 - (4 - 17) + (8 + 9)\,\} =$

c) $-5 + 10 - \{\,2 + 6 - 15 - [\,8 + (\,7 + 3\,) - 9 - 6\,] + 2\,\} =$

Tarea 3

Resuelve las siguientes operaciones:

a) $19 - 4\{3[5 - 8(4 - 10) - 2] + 19\} - 11 =$

b) $-2\,(-5) - 7\{3[6 - 8\,(-3) - 7]\} =$

c) $8 - 3\{4[7 - 2(10 - 8) - 8] + 100\} + 7 =$

d) $2\,x\,8 + (7 + 6 - 2) - 10 \div 4 =$

e) $[10 - (4 - 12 \div 2)]\,x\,[4 + (3\,x\,3 - 6)] - 5 + (19 - 5x\,3) =$

4. Definición

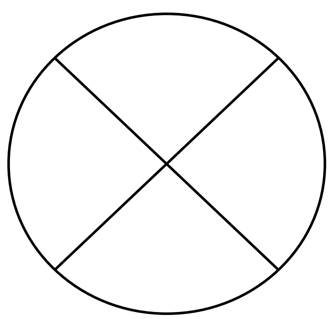
En matemáticas, todo número racional que tiene la forma $\frac{a}{b}$ es conocido como fracción o quebrado.

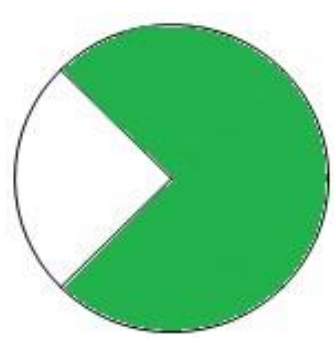
Las fracciones responden a la idea intuitiva de dividir un entero en partes iguales.

Los términos de una fracción son el numerador y el denominador, el primero indica el número de partes que “se deben tomar del entero” y el segundo, el número en el que se deberá dividir dicho entero.

$$\text{Denominador} \longleftarrow \frac{a}{b} \quad a \longrightarrow \text{Numerador}$$

Así, si tenemos la fracción $\frac{3}{4}$, deberemos dividir el entero en 4 partes iguales y tomar de él 3 de ellas.





Entero dividido en 4 partes Representación de la fracción $\frac{3}{4}$

Dado que tanto el numerador como el denominador de las fracciones pueden tomar cualquier valor dentro del campo de los números enteros, se ha recurrido a clasificarlas con la intención de facilitar su entendimiento.

Entre las clasificaciones más importantes de las fracciones tenemos, fracciones iguales a la unidad, propias, impropias, mixtas, equivalente, irreducibles, e inversas.

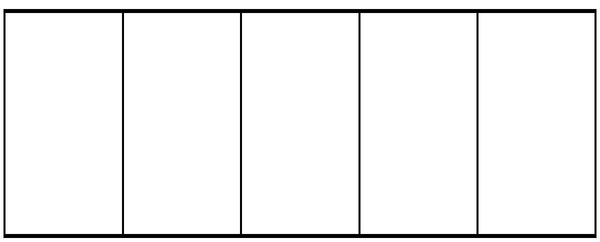
4.1 Fracciones iguales a la unidad

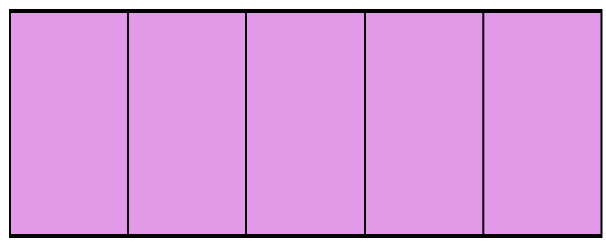
Las fracciones iguales a la unidad son aquellas en las que el tanto el numerador como el denominador son iguales, de aquí que el resultado de dividir el numerador entre el denominador, el resultado sea 1.

Ejemplo:

Sea la fracción $\frac{5}{5}$

- Si realizamos la división el resultado es 1.
- Si representamos a la fracción gráficamente tendremos lo siguiente:





Entero dividido en 5 partes   Tomamos 5 de las 5 partes   del entero

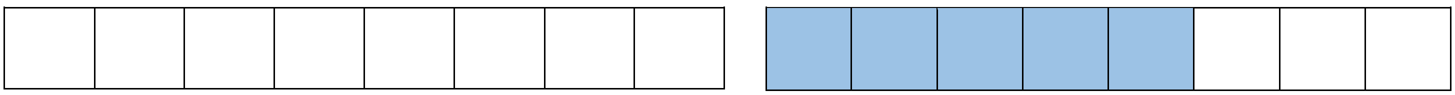
4.2 Fracciones propias

Se les llama fracciones propias a aquellas en las que el numerador es menor que el denominador, en consecuencia, si dividimos el numerador entre el denominador, el resultado será menor a la unidad

Ejemplo:

Sea la fracción $\frac{5}{8}$,

- Si realizamos la división el resultado será 0.625 y $0.625 < 1$
- Si representamos a la fracción gráficamente tendremos lo siguiente:



Entero dividido en 8 partes Tomamos 5 de las 8 partes del entero

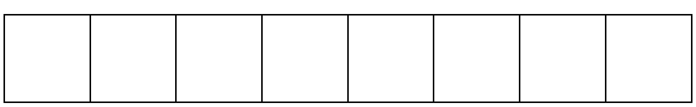
4.3 Fracciones impropias

Se les conoce como fracciones impropias a aquellas en las que el numerador es mayor que el denominador, en consecuencia, si dividimos el numerador entre el denominador, el resultado será un número mayor a 1.

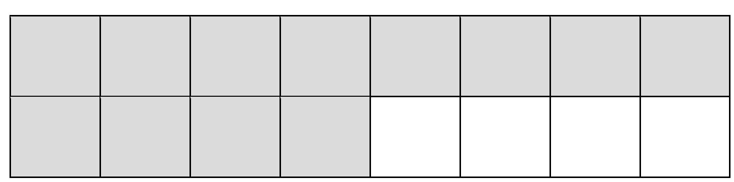
Ejemplo:

Sea la fracción $\frac{12}{8}$,

- Si realizamos la división el resultado será 1.5 y $1.5 > 1$
- Si representamos a la fracción gráficamente tendremos lo siguiente:



Dividimos en 8 partes iguales el entero



Debemos tomar 12 partes de las 8 que tenemos, como esto es imposible, necesitamos un entero más dividido entre 8 partes iguales; así, de este nuevo entero tomamos las partes faltantes

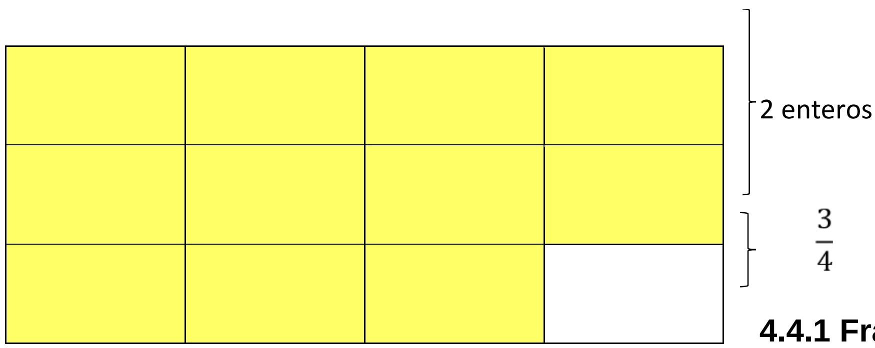
4.4 Fracciones mixtas

Las fracciones mixtas son aquellas cuya representación es cualquier número entero acompañado de una fracción; así las fracciones impropias también pueden ser mixtas y viceversa.

Ejemplo:

Sea la fracción $2\frac{3}{4}$

- Nuevamente, el denominador de la fracción indicara en cuantas partes están divididos los enteros.
- Si representamos a la fracción gráficamente tendremos lo siguiente:



4.4.1 Fracciones mixtas a impropias

Para convertir una fracción mixta a impropia realizamos los siguientes pasos:

- Paso 1. Conservamos el valor del denominador de la fracción mixta y lo colocamos como el denominador de la nueva fracción impropia.
- Paso 2. Para obtener el numerador, multiplicamos el denominador de la fracción por el número entero y sumamos al resultado el valor del numerador de la fracción.

Ejemplo:

Paso 1.

$$2\ \frac{3}{4} = \frac{\quad}{4}$$

Conservamos el valor del denominador de la fracción

Paso 2.

$$\overset{+}{\underset{\times}{2\frac{3}{4}}} = \frac{11}{4}$$

multiplicamos el denominador de la fracción (4) por el número entero (2) y sumamos al resultado el valor del numerador de la fracción (3).

Así, el resultado es $\frac{11}{4}$ y si verificamos este resultado con la representación gráfica de $2\frac{3}{4}$ es fácil notar que las fracciones son iguales.

4.4.1 Fracciones impropias a mixtas

Para convertir una fracción impropia a mixta, lo primero que deberemos hacer es dividir el numerador entre el denominador. Una vez hecha la operación, el cociente representará el número de enteros de la fracción, el residuo será el numerador de la fracción y denominador de la fracción estará determinado por el divisor.

Ejemplo:

Utilizaremos la fracción impropia encontrada en el apartado anterior,

$$\frac{11}{4}$$

Entonces, dividimos 11÷4

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline 4 & 11 \\ & 3 \end{array} \quad \rightarrow \quad 2\frac{3}{4}$$

Siguiendo las especificaciones antes señaladas, logramos convertir una fracción impropia a una mixta

4.5 Fracciones equivalentes

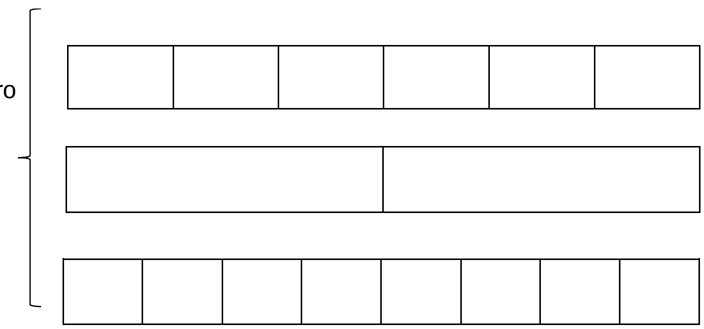
Se les llama fracciones equivalentes al conjunto de aquellas que, al de dividir el numerador entre el denominador, el resultado es el mismo.

Ejemplo:

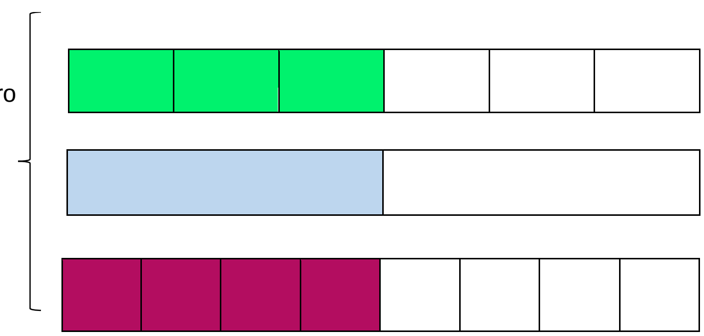
Sean las fracciones $\frac{3}{6}, \frac{1}{2}, \frac{4}{8}$

- Si realizamos la división de cada una, el resultado es 0.5 en cada caso; por lo tanto, son fracciones equivalentes
- Si representamos a las fracciones gráficamente tendremos lo siguiente:

En cada caso, dividimos el entero en el número de partes que nos indica el denominador



En cada caso, dividimos el entero en el número de partes que nos indica el denominador



Gráficamente es fácil notar el sentido de las fracciones equivalentes.

4.6 Fracciones irreducibles

Se les llama fracciones irreducibles a aquellas en las que, al intentar representarlas en su mínima expresión, esto no es posible debido a que no existe un número entero capaz de dividir al numerador y al denominador al mismo tiempo y que el resultado de los términos siga siendo un número entero.

Ejemplo:

Sea la fracción $\frac{120}{78}$,

- Buscamos un número entero capaz de dividir al numerado y al denominador y que además haga que el resultado de ambos términos siga siendo un entero.}

$$\frac{120}{78} \xrightarrow{\div 2} \frac{60}{39}$$

- El número 60 puede dividirse entre 2 y nos resulta 30, el número 39 puede dividirse entre 2 pero no nos resulta un entero (19.5).
- El número 60 puede dividirse entre 3 y nos resulta 20, el número 39 puede dividirse entre 3 pero no nos resulta un entero (6.33).

Buscamos un número que pueda dividir al numerado y al denominador, este será el 2

Así, el único número entero capaz de dividir al 39 y que de como resultado un entero es el 13; sin embargo, 60 entre 13 no resulta un número entero.

Por lo tanto, $\frac{60}{39}$ es una fracción irreducible, además es una fracción equivalente a $\frac{120}{78}$

4.7 Fracciones inversas

Se le llama fracciones inversas a aquel par de fracciones en las que se ha invertido el numerador y el denominador de una con respecto a la otra.

Ejemplo 1:

$$\frac{6}{12} \qquad \frac{12}{6}$$

La fracción $\frac{6}{12}$ es la inversa de $\frac{12}{6}$ y viceversa

Ejemplo 2:

$$\frac{9}{7} \qquad \frac{7}{9}$$

La fracción $\frac{9}{7}$ es la inversa de $\frac{7}{9}$
y viceversa

Ejercicio 4

1. Señala en cada caso si la fracción es equivalente, mixta, impropia, propia, o igual a la unidad.

   a) $\frac{9}{12}$ ____________________________________

   b) $\frac{18}{2}$ ____________________________________

   c) $1\,\frac{6}{7}$ ____________________________________

   d) $\frac{8}{12}, \frac{4}{6}, \frac{16}{24}$ ____________________________________

   e) $\frac{97}{102}, \frac{1o2}{97}$ ____________________________________

   f) $\frac{8}{8}, \frac{72}{72}, \frac{66}{66}$ ____________________________________

2. Convierte las siguientes fracciones impropias a mixtas

a) $\frac{56}{12}$
b) $\frac{14}{6}$
c) $\frac{69}{7}$
d) $\frac{171}{24}$
e) $\frac{102}{97}$

Tarea 4

1. Convierte las siguientes fracciones mixtas a impropias

f) $1\frac{5}{12}$
g) $4\frac{9}{23}$
h) $2\frac{6}{7}$
i) $6\frac{1}{24}$
j) $7\frac{11}{18}$

5. Operaciones básicas

Con las fracciones se puede operar de la misma forma que con cualquier número del conjunto de los números reales; es decir, se puede sumar, restar, multiplicar y dividir, todo esto atendiendo a las leyes de los signos y a algunas reglas que se describirán a continuación:

5.1 Suma y resta de fracciones con el mismo denominador

Cuando de desean sumar o restar dos o más fracciones con el mismo denominador, se suman o se restan los numeradores y se conserva el mismo denominador, la fracción que resulte puede ser expresada a través de su mínima representación, también conocida como simplificación

La forma general para expresar la suma de dos o más fracciones con el mismo denominador es la siguiente:

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}+\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{b}}=\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{b}}$$

Ejemplo:

$$\frac{1}{9}+\frac{16}{9}=\frac{1+16}{9}=\frac{17}{9}$$ Fracción irreducible

Así mismo, la forma general para expresar la resta de dos o más fracciones con el mismo denominador es la siguiente:

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}-\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{b}}=\frac{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{b}}$$

Ejemplo:

$$\frac{121}{12}-\frac{19}{12}=\frac{121-19}{12}=\underbrace{\frac{102}{12}=\frac{51}{6}=\frac{17}{2}}_{\text{Fracciones equivalentes}}$$ Fracción irreducible

5.2 Suma y resta de fracciones con diferente denominador

Cuando de desea sumar o restar fracciones con diferente denominador, se puede recurrir al método de simplificación, mínimo común múltiplo o productos cruzados.

El método que será utilizado dentro de este curso será el de productos cruzados; no obstante, se sugiere al lector familiarizarse con los otros dos métodos a través de una revisión bibliográfica.

En el método de productos cruzados, se sugiere seguir los siguientes pasos:

Pasó 1: Se multiplica el denominador de la segunda fracción por el numerador de la primera y el resultado se coloca en la posición del numerador seguido del signo más o menos,

Pasó 2: Se multiplica el denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda, el resultado se coloca en la posición de denominador después del signo de más o menos,

Pasó 3: Se multiplican los denominadores de las fracciones y el resultado se coloca en la posición del denominador de la nueva fracción resultado.

Es importante señalar que cuando se tienen 3 o más fracciones, primero se deberá operar con dos de ellas, una vez que se obtenga el resultado, se operará con las fracciones faltantes de forma análoga.

La forma general para expresar la suma de fracciones con diferente denominador es la siguiente:

$$\frac{a}{b}\ \frac{c}{d} = \frac{da+bc}{bd}$$

Ejemplo:

$$\frac{5}{12}+\frac{1}{2}=\frac{10+12}{24}=\frac{22}{24}=\frac{11}{12}$$

La forma general para expresar la resta de fracciones con diferente denominador es la siguiente:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$$

Ejemplo:

$$\frac{8}{10} - \frac{1}{2} = \frac{16 - 10}{20} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

5.3 Multiplicación de fracciones

Para realizar esta operación con fracciones, solo se deberá multiplicar el numerador de la primera fracción por el numerador de la segunda, el resultado será el numerador del resultado.

Por otro lado, para determinar el valor del denominador del resultado de la operación, se deberán multiplicar de forma directa los denominadores de las fracciones.

La forma general para expresar la multiplicación de fracciones es la siguiente:

$$\frac{a}{b} \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Ejemplo:

$$\frac{7}{9} x \frac{6}{10} = \frac{42}{90} = \frac{21}{30} = \frac{7}{10}$$

5.4 División de fracciones

Para realizar esta operación con fracciones, solo se deberá multiplica el denominador de la segunda fracción por el numerador de la primera y el resultado se coloca en la posición del numerador; por otro lado, para determinar el valor del denominador se multiplica el denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda.

La forma general para expresar la división de fracciones es la siguiente:

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} \quad \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}} = \frac{\boldsymbol{ad}}{\boldsymbol{bd}}$$

Ejemplo:

$$\frac{8}{24} \div \frac{1}{9} = \frac{72}{24} = \frac{36}{12} = \frac{18}{6} = 3$$

Ejercicios 5

Resuelve las siguientes operaciones con fracciones:

a) $\frac{12}{50} - \frac{1}{60} =$

b) $\frac{72}{67} + \frac{9}{40} =$

c) $\frac{27}{74} x \frac{1}{10} =$

d) $\frac{7}{17} \div \frac{1}{9} =$

e) $\frac{4}{6} - \left(\frac{3}{16} + \frac{1}{32}\right) =$

f) $\frac{100}{150} \div \frac{9}{56} =$

g) $\frac{7}{4} x \frac{2}{10} =$

Tarea 5

Resuelve las siguientes operaciones con fracciones:

a) $1\frac{2}{15} - \frac{1}{60} =$

b) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) =$

c) $\frac{2}{4}\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{10}\right) - 2 =$

d) $\left(\frac{7}{9} \div \frac{1}{16}\right)\left(\frac{7}{17} x \frac{1}{9}\right) =$

e) $\left(\frac{3}{11} x \frac{15}{16}\right) \div \left(\frac{11}{20} - \frac{2}{18}\right) =$